Olympiadeklassen
ab 11

66. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2026 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

661211

Malin und Noel spielen ein Spiel mit Steinen, die auf zwei Schalen aufgeteilt sind.

Zu Beginn des Spiels befinden sich in jeder Schale eine vorgegebene Anzahl von Steinen, die auch null sein kann. Die Spielenden ziehen abwechselnd, wobei Malin beginnt.

Wer am Zug ist, wählt aus den beiden folgenden Möglichkeiten einen erlaubten Zug und führt diesen dann aus:

(1) Nur erlaubt, falls sich die Anzahl der Steine in den Schalen um mindestens zwei unterscheidet: Aus der Schale mit mehr Steinen wird ein Stein in die Schale mit weniger Steinen bewegt.

(2) Nur erlaubt, falls in jeder Schale mindestens ein Stein liegt: Befinden sich in einer Schale weniger Steine als in der anderen, werden aus ihr alle Steine entfernt. Sind beide Anzahlen gleich, wird eine beliebige der beiden Schalen geleert.

Ist keiner der beiden möglichen Züge erlaubt, endet das Spiel. Gewonnen hat, wer dann am Zug ist, aber keine Zugmöglichkeit hat.

Man untersuche die folgenden Spielsituationen:

a) Zu Beginn liegen 4 Steine in einer Schale und 2 Steine in der anderen. Wer kann den Gewinn erzwingen?

b) Zu Beginn liegen in einer Schale 2026 und in der anderen 66 Steine. Wer kann den Gewinn erzwingen? Man gebe hierfür eine geeignete Spielstrategie an.

661212

Für zwei Winkel α und β seien

$$p = \cos(\alpha) + \cos(\beta) \qquad \text{und}$$
$$q = \sin(\alpha) + \sin(\beta)$$

gegeben. Man bestimme $\cos(\alpha - \beta)$ in Abhängigkeit von p und q.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

661213

Für eine positive reelle Zahl C werden die Lösungspaare (x, y) des Ungleichungssystems

$$x + \frac{1}{y} \leq C\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + y \leq C \tag{2}$$

untersucht, wobei x und y positive ganze Zahlen sind.

a) Man bestimme für $C = 46$ die Anzahl solcher Lösungspaare (x, y).

b) Man bestimme alle positiven reellen Zahlen C, für die es genau 2026 solche Lösungspaare (x, y) gibt.

661214

Ein Fahrzeug kann nur geradeaus oder auf Kreisbögen mit dem festen vorgegebenen Radius $r > 0$ fahren. Dabei gehen Geradenstücke und Kreisbogenstücke so ineinander über, dass in den Übergangspunkten die Tangenten übereinstimmen, und es kann nach Bedarf vorwärts oder rückwärts gefahren werden.

Das Fahrzeug steht auf einer ausreichend großen Ebene, genau in Fahrtrichtung Norden ausgerichtet.

a) Man bestimme die kürzeste Länge l_0 für einen Weg, das Fahrzeug zu wenden. Danach soll das Fahrzeug wieder auf dem gleichen Punkt, jedoch nach Süden ausgerichtet stehen. Man begründe, dass es keine kürzeren Wege gibt.

b) Der Rückwärtsgang sei kaputt. Man zeige, dass es möglich ist, das Fahrzeug wie unter a) zu wenden, indem es nur vorwärts fährt und dabei eine Strecke von $l < 8r$ zurücklegt.